

Alberto Cogliati, *La geometria non euclidea. Una breve storia dall'antichità a Poincaré*, Carocci, Roma 2024, 223 pp.

di Efrem Trevisan

Filosofia, matematica e geometria intrattengono stretti rapporti sin dall'antichità: basti pensare a Pitagora, alla scuola eleatica di Parmenide e Zenone fino ai grandi dialoghi platonici come il *Timeo*. La filosofia, la matematica e la geometria, effettivamente, si occupano tutte – con metodi e prospettive diverse – del nostro modo di comprendere la realtà. Il libro di Alberto Cogliati coglie perfettamente queste suggestioni affrontando un argomento ancora poco presente nella letteratura critica sulla storia della geometria; seguendo le parole dello stesso autore: «Perché proporre un nuovo volume sulla geometria non euclidea e la sua storia? Vedo essenzialmente due ragioni: innanzitutto, per riaffermare l'importanza che il tema dovrebbe rivestire nella formazione di matematici, filosofi e futuri insegnanti; in secondo luogo, per l'esigenza di fornire una trattazione aggiornata che possa (sperabilmente) rappresentare una sorta di integrazione ai testi classici sull'argomento [...] di cui già disponiamo» (p. 11).

L'opera inizia con una breve panoramica sulla geometria pre-euclidea: qui possiamo assistere a ragionamenti grezzi e non formalizzati, come, ad

esempio, nel *Menone* di Platone o negli *Analitici* di Aristotele. Solamente con gli *Elementi* di Euclide, nel III secolo a.C., troviamo la prima sistematizzazione di regole e dimostrazioni geometriche. Il libro presenta inizialmente una serie di affermazioni indimostrate che fungono da base per tutte le dimostrazioni dei tredici libri che compongono l'opera: esse si dividono in definizioni, nozioni e postulati. Proprio quest'ultimi, e in particolare il quinto, hanno catalizzato l'attenzione dei matematici e geometri posteriori. Il quinto postulato euclideo – nell'edizione degli *Elementi* curata da Heiberg – recita: «si richiede che, qualora una retta che incide su due rette faccia minori di due retti gli angoli all'interno e dalla stessa parte, le due rette prolungate illimitatamente si intersichino dalla parte in cui troviamo gli angoli minori di due retti».

La complessità nella sua formulazione e la sua apparente indimostrabilità hanno reso questo postulato argomento di grande dibattito nei secoli successivi. Cogliati propone alcuni autori chiave che hanno trattato questa tematica: la fonte più antica è il *Commento al I libro degli "Elementi" di Euclide* di Proclo, in cui il filosofo neoplatonico tenta di dimostrare il quinto postulato di Euclide riprendendo alcuni elementi del *corpus* aristotelico; i tentativi di dimostrazione proseguono anche in terra araba ad opera di Thābit ibn Qurra, Ibn al-Haytam e, soprattutto, Umar Khayyām fino all'Italia medievale con Cristoforo Clavio. Un'ulteriore trattazione del quinto postulato viene proposta nel XVII secolo da John Wallis che, tramite il principio di similitudine, giunge alla seguente conclusione: «*Datae cuicunque figurae, similem aliam cujuscunque*

*magnitudinis possibilem esse*». Accanto a Wallis, sono meritevoli di menzione anche gli studi di Lagrange e i teoremi sulle parallele del matematico francese Adrien Marie Legendre. Tuttavia, questi tentativi (per quanto affascinanti) poggiano ancora – come evidenzia Cogliati riproponendone lo schema – su richieste non lecite e su dimostrazioni non valide a livello logico-geometrico.

Una svolta negli studi sul quinto postulato euclideo si ha nel 1733, quando viene pubblicato *l'Euclides ab omni naevo vindicatus*, scritto dal gesuita Giovanni Girolamo Saccheri. Partendo dal quadrilatero birettangolo isoscele e dalle confutazioni dell'ipotesi dell'angolo ottuso e dell'angolo acuto, Saccheri «stabilisce in maniera semplice ed elementare una proprietà caratteristica della geometria iperbolica (in effetti si tratta proprio della negazione del quinto postulato euclideo) secondo la quale esistono rette inclinate rispetto a una retta data che tuttavia non sono ad essa incidenti» (p. 75). *L'Euclides* – pur essendo poco considerato nei libri di storia della matematica – attira l'attenzione di alcuni autori contemporanei di Saccheri: Georg Klügel, ad esempio, dimostra «un sentimento di generale scetticismo rispetto alla possibilità di produrre una dimostrazione del postulato euclideo» (p. 77); altri matematici, come Heinrich Lambert, invece, vedono nell'opera di Saccheri la base per costruire un nuovo metodo di dimostrazione basato sulla negazione dell'ultimo postulato degli *Elementi*.

Le osservazioni di Saccheri gettano le basi per le geometrie non euclidee, che trovano una prima formulazione solamente nella seconda metà del XIX secolo grazie a János Bolyai e

Nikolaj Lobačevskij. Entrambi questi matematici – il primo nell'*Appendix*, il secondo nelle *Geometrische Untersuchungen* – trattano il postulato delle parallele con un approccio innovativo: si ammette per la prima volta che possano esistere altri spazi oltre a quello empirico-sensibile e, tramite questa operazione si può dimostrare che in questi spazi “alternativi” tutti i postulati proposti da Euclide tranne il quinto sono validi. Questa intuizione diventa subito oggetto di grande dibattito nell'ambiente accademico, coinvolgendo intellettuali come Carl Friedrich Gauss, Bernhard Riemann, Hermann von Helmholtz ed Eugenio Beltrami. Da questo vivace e articolato dibattito nascono e si sviluppano la geometria iperbolica e la geometria sferica (soprattutto con Riemann) e la geometria differenziale (analizzata, in particolare, nel *Saggio* di Beltrami). La trattazione di Cogliati si conclude con alcune riflessioni sul rapporto tra geometria, matematica ed epistemologia avvenute a fine Ottocento. In questo contesto le geometrie non euclidee trovano una rigorosa formalizzazione grazie agli strumenti del calcolo delle derivate e a quello integrale ad opera di autori come Klein e Poincaré. In tali autori si riscontra un approccio – già presente in Bolyai e Lobačevskij – di «netto distacco dalla concezione di derivazione classica secondo la quale alle definizioni di un sistema assiomatico corrispondono enti dotati di natura univoca che, nel caso della geometria euclidea, era per lo più interpretata come il riflesso delle proprietà dello spazio fisico» (pp. 209-10).

Quest'opera tratta in modo preciso e lineare gli sviluppi di uno dei problemi più complessi della storia del-

la geometria; il contenuto è piuttosto tecnico, con Cogliati che propone le dimostrazioni che i vari autori usano per la risoluzione del postulato euclideo, ma presenta anche elementi di carattere storico e – a tratti – filosofico che offrono vari spunti di riflessione. Il libro si presta alla lettura da parte di chi ha già una buona base di geometria e matematica; ma, al di là dei tecnicismi, esso mostra chiaramente l'interdisciplinarietà tra cultura umanistica e cultura scientifica.